МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ ТА НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
«ХАРКІВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ»

О. В. Кобець, Т. Є. Третяк, В. О. Склепус

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ
до виконання лабораторних робіт
з курсу «Комп'ютерне забезпечення»

для студентів спеціальності «Прикладна механіка»
денної, заочної та дистанційної форм навчання

Затверджено
редакційно-видавничою
радою університету,
протокол №3 від 10.10.18 р.

Харків
НТУ «ХПІ»
2019

Методичні вказівки до виконання лабораторних робіт із курсу «Комп’ютерне забезпечення» для студентів спеціальності «Прикладна механіка» денної, заочної та дистанційної форм навчання / уклад.: Кобець О. В., Третяк Т. Є, Склепус В. О. – Харків : НТУ «ХПІ», 2019. – 48 с.

Укладачі: О. В. Кобець,
Т. Є. Третяк,
В. О. Склепус

Рецензент доц. Мироненко О.Л.

Кафедра інтегрованих технологій машинобудування ім. М.Ф. Семка

1. ЗНАХОДЖЕННЯ ЕКСТРЕМАЛЬНИХ ТОЧОК ФУНКЦІЇ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ МЕТОДОМ НЬЮТОНА

1.1. Введення

В основі оптимізації інженерних розрахунків лежать різні методи пошуку оптимальних значень максимуму або мінімуму функції однієї – $f(x)$ або *n* дійсних змінних $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Якщо функція виражає процес обробки деталі на будь-якому типі верстата залежно від часу, то найвигідніше для масового виробництва прагнення до скорочення цього показника, тобто виникає потреба в мінімізації функції. З математичної точки зору не відіграє значної ролі розглядати максимізацію або мінімізацію, оскільки максимізація функції $f(x)$ еквівалентна мінімізації функції $-f(x)$.

На значення змінних у функції можуть накладатися різного роду обмеження, так у нашім прикладі процес обробки деталі може залежати від розміру заготовки, імовірності виходу інструмента з ладу й інших факторів. Таким чином, у ході оптимізації необхідно врахувати вплив усіх цих факторів, однак оскільки розв'язок таких задач представляє значні труднощі, для ознайомлення з курсом будуть розглянуті функції, на змінні яких обмеження не накладають.

У будь-якій практичній оптимізаційній задачі існують співпадаючі етапи. Найбільш важливий з них – моделювання розглянутої фізичної ситуації з метою одержання математичної функції, яку необхідно мінімізувати, а також урахування впливу обмежень. Потім вибирають підходящу процедуру для здійснення мінімізації, яку реалізують на обчислювальній машині. І в завершенні математичний результат інтерпретують у терміни фізичного змісту задачі.

1.2. Поняття екстремуму функції однієї змінної

Т е о р е м а 1. Нехай $f(x)$ безперервна на [*a*, *b*] і диференційовна на (*a*, *b*). Для того, щоб функція $f(x)$ була сталою на [*a*, *b*] необхідно та достатньо, щоб $f'(x) = 0$ для всіх $x \in (a, b)$.

Т е о р е м а 2. Нехай $f(x)$ безперервна на $[a, b]$ і диференційовна на (a, b), тоді:

- якщо $f'(x) > 0$ для всіх $x \in (a, b)$, то $f(x)$ зростає;
- якщо $f'(x) < 0$ для всіх $x \in (a, b)$, то $f(x)$ спадає.

Т е о р е м а 3. Якщо диференційовна на інтервалі (a, b) функція $f(x)$ зростає, то $f'(x) \geq 0$ для всіх $x \in (a, b)$. Якщо функція $f(x)$ спадає, то $f'(x) \leq 0$ для всіх $x \in (a, b)$.

Точка x_0 називається точкою *локального максимуму* (*мінімуму*) функції $y = f(x)$, якщо існує такий її окіл $(x_0 - \delta,\ x_0 + \delta)$, в якому $f(x_0)$ є найбільшим (найменшим) серед усіх інших значень цієї функції. Точки локального максимуму та мінімуму функції називаються точками *екстремуму* цієї функції (рис. 1.1).

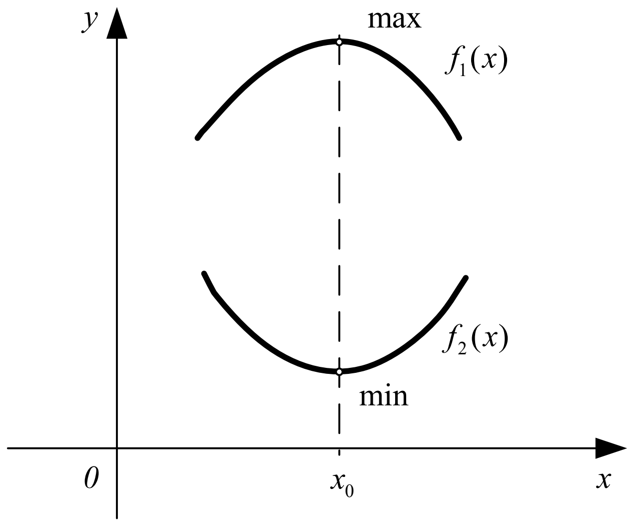


Рисунок 1.1 – Точки екстремуму

Т е о р е м а 4. (*Необхідна ознака існування екстремуму*).

Якщо безперервна функція $f(x)$ має в точці $x = x_0$ екстремум, то похідна функції $f'(x_0) = 0$ або не існує. Точки, в яких похідна дорівнює нулю або не існує, називаються *критичними*.

Т е о р е м а 5. (*Достатня ознака існування екстремуму функції за першою похідною*).

Нехай x_0 – критична точка. Тоді, якщо функція $f(x)$ має похідну $f'(x)$ в деякому околі точки x_0 і якщо похідна $f'(x)$ при переході через точку x_0 змінює знак із плюса на мінус, то функція в цій точці має максимум, а при зміні знака з мінуса на плюс – мінімум.

Теорема 6. (*Достатня ознака існування екстремуму функції за другою похідною*).

Якщо функція $f(x)$ в деякому околі точки x_0 безперервна та двічі диференційовна, причому $f'(x_0)=0$, $f''(x_0)\neq 0$, то, якщо $f''(x_0)>0$, у точці x_0 функція має мінімум; якщо $f''(x_0)<0$, функція в точці x_0 має максимум.

1.2.1. Обчислення найбільшого та найменшого значень функції на відрізку

Названі значення можуть досягатися або в точках екстремуму, або на кінцях відрізку. Тому поставлену задачу розв'язують у три дії.

1. Знаходять критичні точки, де похідна $f'(x)=0$ або не існує. При цьому приймають до уваги тільки ті із них, що належать до відрізку.

Щоб знайти критичні точки, треба розв'язати рівняння $f'(x)=0$, що не завжди просто зробити. В цьому випадку рівняння $f'(x)=0$ можна розв'язати чисельним методом.

2. Обчислюють значення функції в критичних точках і на кінцях відрізку.

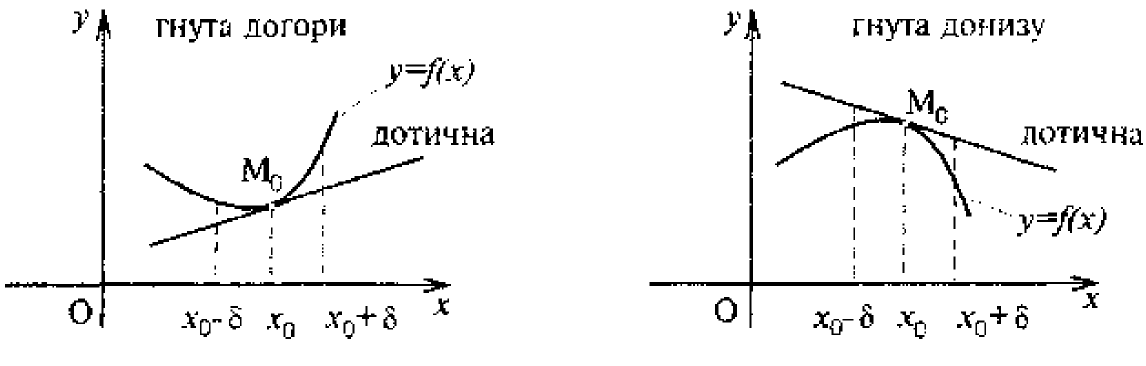
3. Із обчислених значень вибирають найбільше та найменше.

1.3. Опуклість і вгнутість кривих. Точки перегину

Крива називається *вгнутою* (гнутою догори) в точці з абсцисою x_0, якщо в деякому околі цієї точки $(x_0-\delta,\ x_0+\delta)$ вона розташована вище дотичної, проведеної в точці x_0 (рис. 1.2, *а*). Якщо крива розташована нижче дотичної, то вона називається *опуклою* (гнутою донизу) (рис. 1.2, *б*).

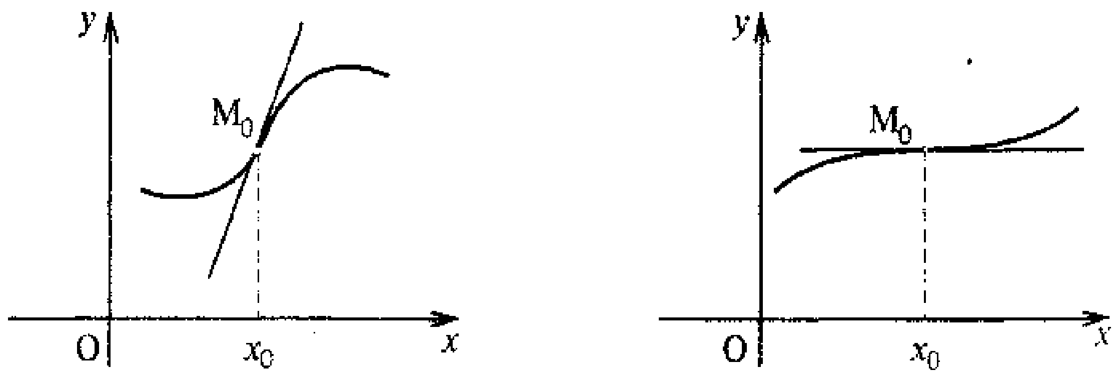
Теорема 1. Якщо функція $f(x)$ в деякому околі точки x_0 двічі неперервно диференційовна й $f''(x_0)\neq 0$, то необхідною та достатньою умовою опуклості кривої у точці x_0 є умова $f''(x_0)<0$; вгнутості – $f''(x)>0$.

Точка $M_0(x_0, f(x_0))$ називається точкою перегину цієї кривої (рис. 1.3, *а*, *б*), якщо існує такий окіл точки x_1, що при $x < x_1$ в цьому околі крива гнута в один бік, а при $x > x_1$ крива гнута у другий бік.



а *б*

Рисунок 1.2 – Опуклість і вгнутість кривих: *а* – крива вгнута; *б* – крива опукла



а *б*

Рисунок 1.3 – Точки перегину кривих

Для того, щоб точка $x = x_0$ була *точкою перегину* деякої кривої *необхідно*, щоб друга похідна функції в цій точці або дорівнювала нулю ($f''(x_0) = 0$), або не існувала.

Т е о р е м а 2. (Достатня умова існування *точки перегину*). Нехай крива визначається рівнянням $y = f(x)$. Якщо $f''(x_0) = 0$ або $f''(x_0)$ не існує й при переході через $x = x_0$ похідна $f''(x_0)$ змінює знак, то точка кривої з абсцисою x_0 є точкою перегину.

1.4. Асимптоти кривих

Пряма $x = x_0$ називається вертикальною асимптотою, якщо $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \pm\infty$.

П р и к л а д. $y = \dfrac{1}{1 - x^2}$.

Прямі $x = \pm 1$ – вертикальні асимптоти, тому що

$$\lim_{x \to 1 \pm 0} \frac{1}{1 - x^2} = \mp\infty;$$

$$\lim_{x \to -1 \pm 0} \frac{1}{1 - x^2} = \pm\infty.$$

Асимптота кривої $y = f(x)$, яка має нескінченну вітку, – пряма, така, що відстань від точки $(x, f(x))$ до цієї прямої наближається до нуля, коли точка необмежено віддаляється вздовж своєї нескінченної вітки ($x \to \pm\infty$).

Рівняння похилої асимптоти має вигляд $y = kx + b$. Зокрема, якщо $k = 0$, асимптота є горизонтальною. Якщо похила асимптот існує, то k і b визначають за формулами:

$$k = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x},$$

$$b = \lim_{x \to \pm\infty} (f(x) - kx).$$

Якщо хоча б однієї з границь не існує, то похилих асимптот крива не має. Асимптоти можуть бути різними при $x \to +\infty$ й при $x \to -\infty$.

1.5. Загальна схема дослідження функції та побудова її графіка

1) Знаходять область існування функції. Це дає змогу визначити ті точки осі абсцис, над якими пройде графік функції, а над якими ні.

2) Знаходять точки розриву функції і з’ясовують їхній характер. Складають рівняння вертикальних асимптот і визначають інтервали неперервності функції.

3) Перевіряють парність і непарність функції. Належність функції до парних або непарних спрощує дослідження, оскільки дозволяє обмежитися значеннями аргументу $x \geq 0$.

4) З’ясовують періодичність функції. Якщо функція періодична, то дослідження проводять тільки в межах одного періоду. Потім роблять аналітичне і графічне продовження на всю область визначення.

5) Знаходять точки перетину графіка функції із осями координат. Ординати точок перетину із віссю *0y* обчислюють за формулою $y = f(0)$. Щоб знайти абсциси точок перетину із віссю *0x*, розв’язують рівняння $f(x) = 0$.

6) За допомогою першої похідної визначають інтервали монотонності та досліджують екстремуми. Результати досліджень заносять у таблицю, щоб можна було зручніше скористатися нами при побудові графіка.

7) За допомогою другої похідної визначають інтервали опуклості та вгнутості графіка, а також знаходять точки його перегину. Одержані результати теж заносять у таблицю.

8) Обчислюють коефіцієнти в рівняннях похилих асимптот.

9) Наближено будують графік функції. Спочатку проводять прямі лінії (вертикальні та похилі асимптоти), потім відкладають характерні точки (перетину з осями координат, екстремумів, перегинів) і через них наближено проводять графік.

1.6. Наближене розв’язання алгебраїчних і трансцендентних рівнянь

1.6.1. Попереднє відділення коренів

Нагадаємо, що розв'язання рівняння

$$f(x) = 0 \tag{1.1}$$

полягає в визначенні тих значень x (коренів), для яких вираз (1.1) стає тотожністю. Серед таких можуть бути дійсні та комплексні числа. Далі ми розглянемо методи обчислення тільки простих дійсних коренів. Корінь $x = x_0$ вважають *простим*, коли $f(x_0) = 0$, а $f'(x_0) \neq 0$.

Окремий клас складають рівняння, в яких ліва частина є поліномом $P_n(x)$. Їх називають *алгебраїчними n-го ступеню.*

Якщо $f(x)$ не є поліномом, то рівняння називають *трансцендентним.*

Процес побудови розв'язку складається з двох етапів. На першому відділяють корені, тобто встановлюють проміжки ізоляції, на яких знаходиться тільки по одному кореню. Цю задачу розв'язують графічно, аналітичним способом. або за допомогою обчислень на ЕОМ.

При *графічному відділені* вираз (1.1), по можливості, перетворюють в рівняння типу

$$f_1(x) = f_2(x),$$

так, щоб побудова графіків функцій $y_1 = f_1(x)$ і $y_2 = f_2(x)$ не викликала ускладнень.

Приклад. Відділити *графічно* корені трансцендентного рівняння

$$\cos x - x = 0 \qquad (1.2)$$

Рівняння (1.2) записують в формі

$$\cos x = x.$$

Фрагменти графіків функцій $y_1 = \cos x$ і $y_2 = x$ показано на рис. 1.4

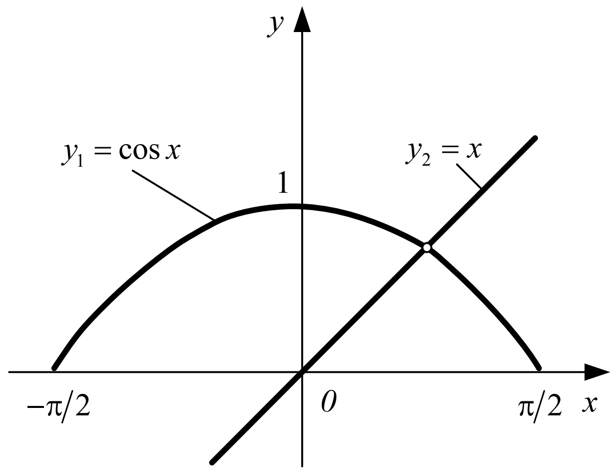


Рисунок 1.4 – Графічне відділяння коренів рівняння 1.2

Із нього видно, що абсциса точки перетину графіків (корінь) попадає в проміжок $(0, \pi/2)$, який можна вважати проміжком ізоляції.

Других точок перетину графіків немає. Це означає, що рівняння (1.2) має лише один корінь.

П р и к л а д. Відділити *аналітично* корені рівняння

$$5^x - 6x - 3 = 0$$

Позначимо $f(x) = 5^x - 6x - 3$. Знаходимо похідну $f'(x) = 5^x \ln 5 - 6$. Обчислимо корінь похідної:

$$5^x \ln 5 - 6 = 0;\ 5^x = \frac{6}{\ln 5};\ x \lg 5 = \lg 6 - \lg(\ln 5);$$

$$x = \frac{\lg 6 - \lg(\ln 5)}{\lg 5} = \frac{0,7782 - 0,2065}{0,6990} = \frac{0,5717}{0,6990} \approx 0,82.$$

Складемо таблицю знаків функції $f(x)$, приймаючи, що x дорівнює:

а) критичним значенням функції(кореням похідної) або близьким до них;

б) граничним значенням (виходячи з області допустимих значень невідомого):

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$\operatorname{sign} f(x)$	+	–	+

Оскільки відбуваються дві зміни знаку функції, то рівняння має два дійсних кореня. Щоб завершити операцію відділення коренів, слід зменшити проміжки, що містять корені, так щоб їхня довжина була не більше 1. Для цього складемо нову таблицю знаків функції $f(x)$:

x	–1	0	1	2
$\operatorname{sign} f(x)$	+	–	–	+

Звідси видно, що корені знаходяться в таких проміжках: $x_1 \in [-1, 0]$; $x_2 \in [1, 2]$.

При *числовому* відділені коренів обчислюють на ЕОМ значення $f(x)$ для різних значень x і знаходять такі $x = x_1$ і $x = x_2$, щоб $f(x_1) f(x_2) < 0$. Якщо далі виявиться, що для усіх $x \in [x_1, x_2]$ похідна зберігає знак (додатна або від'ємна), то вказаний проміжок можна вважати *проміжком ізоляції*.

Отже, ми виходимо з того, що нам вдалося так чи інакше ізолювати корінь x_0 рівняння $f(x) = 0$ у деякому проміжку $[x_1, x_2]$, $x_1 < x_2$. Кожне з чисел x_1 і x_2 можна вважати наближеним значення кореня x_0: перше x_1 – з недостачею друге – з надлишком, причому різниця $x_2 - x_1$ є, очевидно, граничною абсолютною помилкою цих наближених значень.

У методах *наближеного* розв'язання рівнянь, що ми розглядаємо далі, використовують прийоми, завдяки яким за проміжком ізоляції $[x_1, x_2]$ і за функцією $f(x)$ знаходимо такий новий проміжок $[x_1', x_2']$, що

$$x_1 \le x_1' < x_0 < x_2' \le x_2,$$

тобто *звужується проміжок ізоляції*; значення x_1' і x_2' – кращі наближені значення кореня x_0, ніж x_1 і x_2. Застосовуючи до проміжку $[x_1', x_2']$ той же або інший метод, отримуємо ще кращі наближені (уточнені) значення x_1'', x_2'' кореня x_0.

1.6.2. Уточнення коренів

Ми приводимо три методи наближеного розв'язання рівнянь, найпростіші та найзручніші: метод *проб*, метод *хорд* і метод *дотичних*, який відомий ще як метод *Ньютона*.

I. Метод проб. Цей метод є найпростішим, але не найкращим із методів послідовного наближення до кореня рівняння. Нехай проміжок $[x_1, x_2]$ – проміжок ізоляції кореня рівняння $f(x) = 0$. Якщо корінь простий, то значення функції $f(x)$ на кінцях проміжку мають різні знаки; припустимо для визначеності, що $f(x_1) < 0$, а $f(x_2) > 0$. Візьмемо будь-яке значення $x = x'$ в проміжку $[x_1, x_2]$ та випробуємо його, підставивши в функцію $f(x)$. Якщо $f(x') < 0$, то ми, замінюючи x_1 на x', отримаємо звужений проміжок ізоляції $[x', x_2]$; якщо ж $f(x') > 0$, то ми приходимо до звуженого проміжку ізоляції $[x_1, x']$, замінюючи x_2 на x'.

Необмежено застосовуючи метод проб, ми отримаємо послідовність точок $x', x'', \ldots$, яка, як це можна довести має своєю границею корінь x_0. В силу цього за допомогою методу проб можна знайти наближене значення кореня з будь-якою точністю.

Приклад. Розглянемо рівняння

$$f(x) = x^3 + 1{,}1x^2 + 0{,}9x - 1{,}4 = 0\,.$$

Оскільки $f'(x) = 3x^2 + 2{,}2x + 0{,}9 > 0$ для всіх значень *x*, то функція $f(x)$ монотонно зростає і, значить, її графік лише один раз перетинає вісь *0x*; крім того, $f(0) = -1{,}4$, а $f(1) = 1{,}6$, і значить, рівняння має один дійсний корінь, що лежить у проміжку $[0, 1]$.

Знаходимо $f(0{,}5) = -0{,}55$; потім обчислюємо $f(0{,}7) = 0{,}112$.

Це означає, що проміжок $[0{,}5;\, 0{,}7]$ є зменшений проміжок ізоляції шуканого кореня. Далі ми маємо

$$f(0{,}6) = -0{,}25\,,\ f(0{,}65) = -0{,}076\,,\ f(0{,}67) = -0{,}002\,.$$

Ясно, що таким чином ми наближаємося до кореня; він лежить у проміжку $[0{,}67;\, 0{,}7]$. Наблизимо тепер до кореня праву границю проміжку ізоляції. Випробуємо 0,68; отримаємо $f(0{,}68) = -0{,}034$.

Отже, ми знайшли новий проміжок ізоляції $[0{,}67;\, 0{,}68]$, який у 100 разів менший за початковий $[0, 1]$. Якщо взяти за значення кореня число 0,675, то абсолютна помилка буде меншою за 0,005.

II. Метод хорд. Умови зберігаємо ті ж, що і в методі проб. З'єднаємо кінці дуги M_1M_2 (рис. 1.5) кривої $y = f(x)$ хордою M_1M_2, що відповідає проміжку $[x_1, x_2]$. Очевидно (рис. 1.5 *а*), що точка $x = x_1'$ перетину цієї хорди з віссю *0x* лежить ближче до x_0, ніж $x = x_2'$; виходячи з нового звуженого проміжку $[x_1', x_2]$, отримаємо точно так точку x_1'', яка буде лежати ще ближче до x_0 ніж x_1'. Таким чином, знаходимо послідовність точок $x_1, x_1', x_1'', \ldots$, що прямує, спадаючи, до кореня x_0.

Записавши рівняння хорди

$$\frac{y - f(x_1)}{f(x_2) - f(x_1)} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1},$$

знайдемо, поклавши $y = 0$, вираз для абсциси x' точки перетину хорди с віссю *0x*:

$$x' = x_1 - f(x_1)\frac{x_2 - x_1}{f(x_2) - f(x_1)} \text{ або } x' = x_2 - f(x_2)\frac{x_2 - x_1}{f(x_2) - f(x_1)}. \quad (1.3)$$

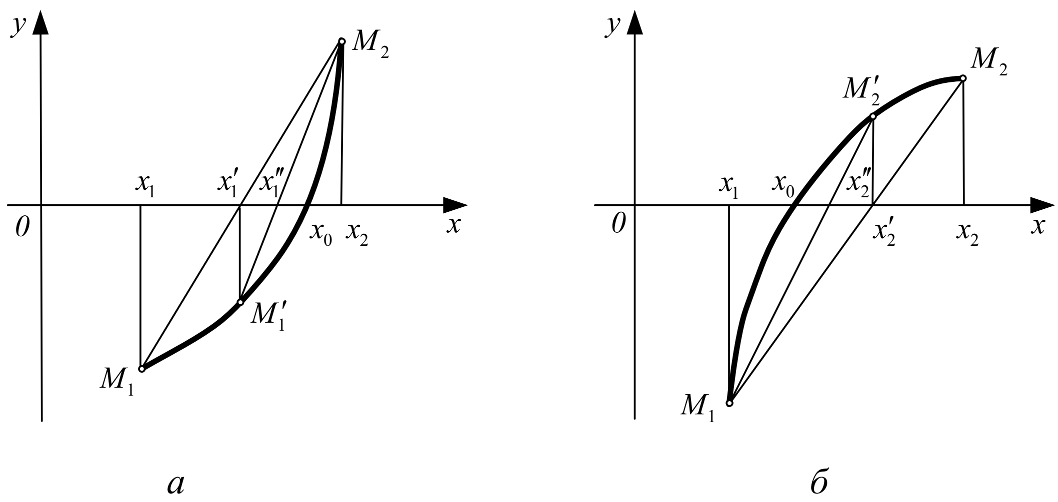


Рисунок 1.5 – Застосування методу хорд для наближеного розв’язання рівнянь

Цей вираз справедливий для обох випадків, зображених на рис. 1.5, *а* і *б*, (а також і коли $f'(x_1) > 0$, $f'(x_2) < 0$), дає нове наближення x' до кореня x_0 за двома попередніми наближеннями x_1 і x_2. Для того, щоб звузити проміжок ізоляції, треба замінити x_1 або x_2 через x'. Яка саме з цих точок замінюється, можна встановити зразу за відомою нам поведінкою функції $f(x)$ або, коли це важко, за знаком $f'(x)$.

П р и к л а д. Застосуємо метод хорд до того ж самого рівняння

$$f(x) = x^3 + 1{,}1x^2 + 0{,}9x - 1{,}4 = 0.$$

Приймаючи $x_1 = 0$ і $x_2 = 1$, знаходимо за формулою (1.3)

$$x^{\mathrm{I}} = 1 - f(1)\frac{1-0}{f(1)-f(0)} \approx 0{,}467$$

и, далі, вважаючи $x_1 = 0{,}467$, $x_2 = 1$,

$$x^{\mathrm{II}} \approx 0{,}617;$$

точно так

$$x^{\mathrm{III}} \approx 0{,}660, \quad x^{\mathrm{IV}} \approx 0{,}668, \quad x^{\mathrm{V}} \approx 0{,}670, \quad x^{\mathrm{VI}} \approx 0{,}670.$$

Усталеність перших трьох десяткових знаків в x^{V} і в x^{VI} свідчить, як майже й завжди при подібних обчисленнях, на те, що ми підійшли близько до істинного значення кореня. Випробуємо для обчислення точності значення 0,671. Маємо: $f(0{,}671) \approx 0{,}0012$, і оскільки $f(0{,}670) < 0$, то новим проміжком ізоляції довжиною всього в 0,001 буде проміжок $[0{,}670; 0{,}671]$. Взявши за наближене значення кореня 0,6705, ми допускаємо помилку, що не перевищує 0,0005, тобто в 10 разів меншу за ту, що була допущена в методі проб при одному й тому ж (приблизно) обсязі обчислень.

III. Метод дотичних (метод Ньютона). Нехай тепер дуга M_1M_2 кривої $y = f(x)$ хордою M_1M_2, що відповідає проміжку ізоляції $[x_1, x_2]$, має в кожній своїй точці дотичну і не має точок перегину, тобто $f''(x)$ не змінює знаку в проміжку $[x_1, x_2]$.

Якщо метод хорд базується на заміні дуги кривої її хордою, то при застосуванні методу дотичних дугу замінюють її дотичною. Дотичну проводять в кінцевій точці дуги M_1 або M_2, причому саме в тій, яка лежить над віссю *0x*, якщо дуга ввігнута ($f''(x) \geq 0$) (рис. 1.6, *а*), і яка лежить під віссю *0x*, якщо дуга опукла ($f''(x) \leq 0$) (рис. 1.6, *б*).

Ці умови забезпечують те, що точка перетину x_1' (або x_2') дотичної з віссю *0x* завжди буде знаходитися між коренем x_0 і одним із кінців (x_1 або x_2) проміжку ізоляції $[x_1, x_2]$; проміжок $[x_1', x_2]$ або $[x_1, x_2']$ буде новим звуженим проміжком ізоляції кореня x_0. Якщо якесь із умов не виконується, то новий проміжок ізоляції може виявитися ширше за попередній, і ми, таким чином, не наблизимося до кореня, а віддалимося від нього. Повторне застосування методу дотичних приводить до послідовності, що має за границю корінь x_0. Значить, і за цим методом корінь можна знайти з будь якою точністю.

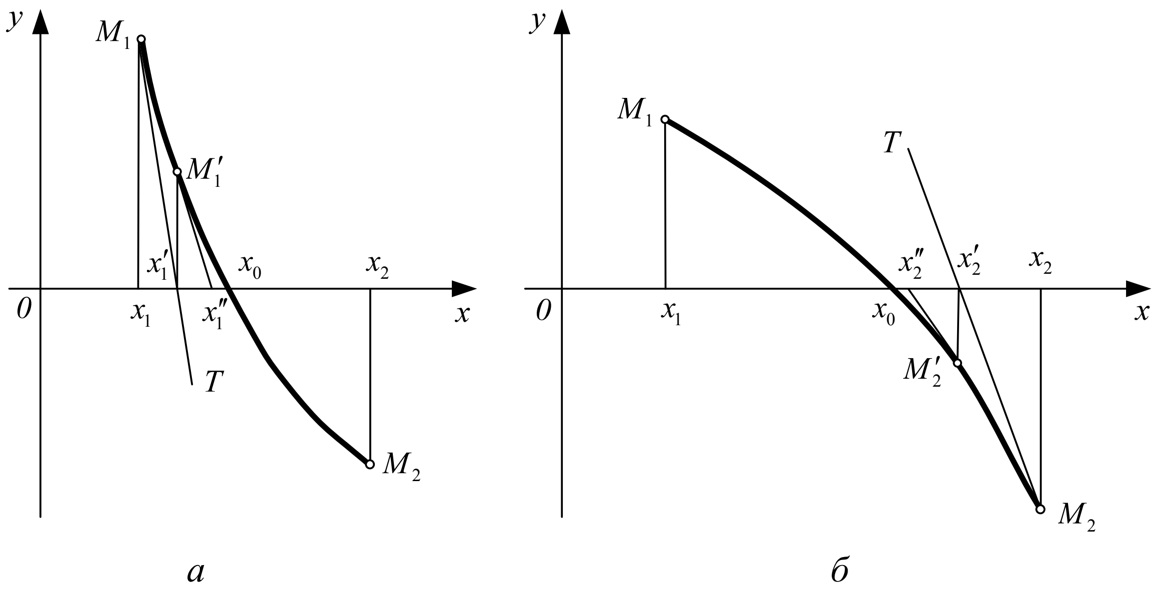


Рисунок 1.6 – Застосування методу дотичних для наближеного розв’язання рівнянь

Написавши рівняння дотичної M_1T або M_2T

$$y - f(x_1) = f'(x_1)(x - x_1)$$

або

$$y - f(x_2) = f'(x_2)(x - x_2),$$

знайдемо, поклавши $y = 0$, вираз для абсциси x_1' або x_2' точки її перетину з віссю *0x*:

$$x_1' = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} \text{ або } x_2' = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)}. \qquad (1.4)$$

В загальному випадку формулу (1.4) можна записати:

$$x_{r+1} = x_r - \frac{f(x_r)}{f'(x_r)}. \qquad (1.5)$$

Ітерації продовжуються поки для двох подальших наближень не буде досягнута необхідна точність.

Приклад. Знову повернемося до того ж рівняння

$$f(x) = x^3 + 1{,}1x^2 + 0{,}9x - 1{,}4 = 0.$$

Оскільки $f''(x) = 6x + 2{,}2 > 0$ в проміжку $[0, 1]$, то дотичну проводимо в точці з абсцисою, що дорівнює 1. За формулою (1.4) маємо послідовно:

$$x^{\mathrm{I}} = 1 - \frac{f(1)}{f'(1)} \approx 0{,}738,$$

$$x^{\mathrm{II}} = 0{,}738 - \frac{f(0{,}738)}{f'(0{,}738)},$$

$$x^{\mathrm{III}} \approx 0{,}671,$$

$$x^{\mathrm{IV}} \approx 0{,}671.$$

Причому зрозуміло із самого методу отримання наближень, що $f(0{,}671) > 0$. Оскільки $f(0{,}670) < 0$, то новим проміжком ізоляції буде проміжок $[0{,}670; 0{,}671]$. Цей проміжок за методом дотичних ми отримали ще скоріше, ніж за методом хорд.

Розглянутий спосіб уточнення коренів був запропонований Ньютоном. Його недоліком є однобоке наближення до кореня (зліва або справа). Цей недолік відсутній при застосуванні комбінованого методу, який розглянемо далі.

IV. Комбінований метод. Спільне використання різних методів для розв'язання рівнянь іноді називають *комбінованим методом*.

Припустимо зараз, що виконані умови, вказані в усіх розглянутих методах: дуга кривої $y = f(x)$, що відповідає проміжку ізоляції $[x_1, x_2]$ кореня x_0 рівняння $f(x) = 0$, у кожній своїй точці має дотичну, не має точок перегину і $f(x_1)f(x_2) < 0$. Якщо застосувати, наприклад, спільно, метод хорд і метод дотичних, то це приведе до двох послідовностей точок, які прямують до точки x_0 з недостачею і з надлишком. У випадку *а* на рис 1.6 метод дотичних дає наближені значення $x_1^{(n)}$ до кореня x_0 з недостачею, а метод хорд – наближені значення $x_2^{(n)}$ з надлишком; у випадку ж *б* – навпаки. Це й прискорює процес обчислення кореня з заданою точністю.

Зрозуміло, що комбінований метод можна також застосувати, сполучаючи метод хорд або метод дотичних з методом проб.

Приклад. Розглянемо те ж саме рівняння

$$f(x) = x^3 + 1{,}1x^2 + 0{,}9x - 1{,}4 = 0 .$$

Застосуємо до цього рівняння комбінований метод. Маємо $x_1^{\mathrm{I}} \approx 0{,}467$ (див. ІІ) і $x_2^{\mathrm{II}} \approx 0{,}738$ (див. ІІІ).

За формулами (1.3) і (1.4) знаходимо

$$x_1^{\mathrm{II}} = 0{,}467 - \frac{f(0{,}467)(0{,}738 - 0{,}467)}{f(0{,}738) - f(0{,}467)} \approx 0{,}658,$$

$$x_2^{\mathrm{II}} \approx 0{,}674,$$

$$x_1^{\mathrm{III}} = 0{,}658 - \frac{f(0{,}658)(0{,}674 - 0{,}658)}{f(0{,}674) - f(0{,}658)} \approx 0{,}670,$$

$$x_2^{\mathrm{III}} \approx 0{,}671$$

Тут ми вже на третьому кроці досягли проміжку ізоляції $[0{,}670; 0{,}671]$, в 1000 разів меншого за початковий проміжок $[0,1]$.

1.6.3. Застосування методу Ньютона для пошуку критичних точок

Нехай потрібно знайти найбільше (найменше) значення деякої функції $f(x)$. Щоб знайти критичні точки, треба розв'язати рівняння $f'(x)=0$, що не завжди просто зробити. В цьому випадку рівняння $f'(x)=0$ можна розв'язати чисельним методом. Приблизний ескіз кривої дозволить отримати наближений розв'язок. Метод Ньютона дозволяє покращити грубу апроксимацію, щоб отримати корінь рівняння $f'(x)=0$. В цій задачі $\varphi(x) \equiv f'(x)$.

Обчислюють значення функції $f(x)$ в критичних точках (знаходять локальний екстремум) і на кінцях відрізку. Із обчислених значень вибирають найбільше та найменше (знаходять абсолютний екстремум).

Наведена нижче схема (рис. 1.7) реалізує алгоритм уточнення кореня рівняння $\varphi(x)=0$ методом Ньютона та пошуку точок локального екстремуму функції $f(x)$. Ітерації продовжуються поки для двох подальших наближень не буде досягнута необхідна точність.

Універсальність алгоритму полягає в тому, що:

- F – підпрограма обчислення першої похідної $f'(x)$ (що є і значенням $\varphi(x)$);
- D – підпрограма обчислення другої похідної $f''(x)$ (що є і значенням $\varphi'(x)$);
- FF – підпрограма обчислення значення функції $f(x)$.

$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
	$\varphi(x)$	$\varphi'(x)$
FF	F	D

Точність розв'язання може бути задана достатньо малою величиною E.

У задачу студента входить самостійне створення програми за наданою схемою (див. рис. 1.7) та її реалізація у відповідності з виданим викладачем варіантом функціональної залежності (табл. А.1).

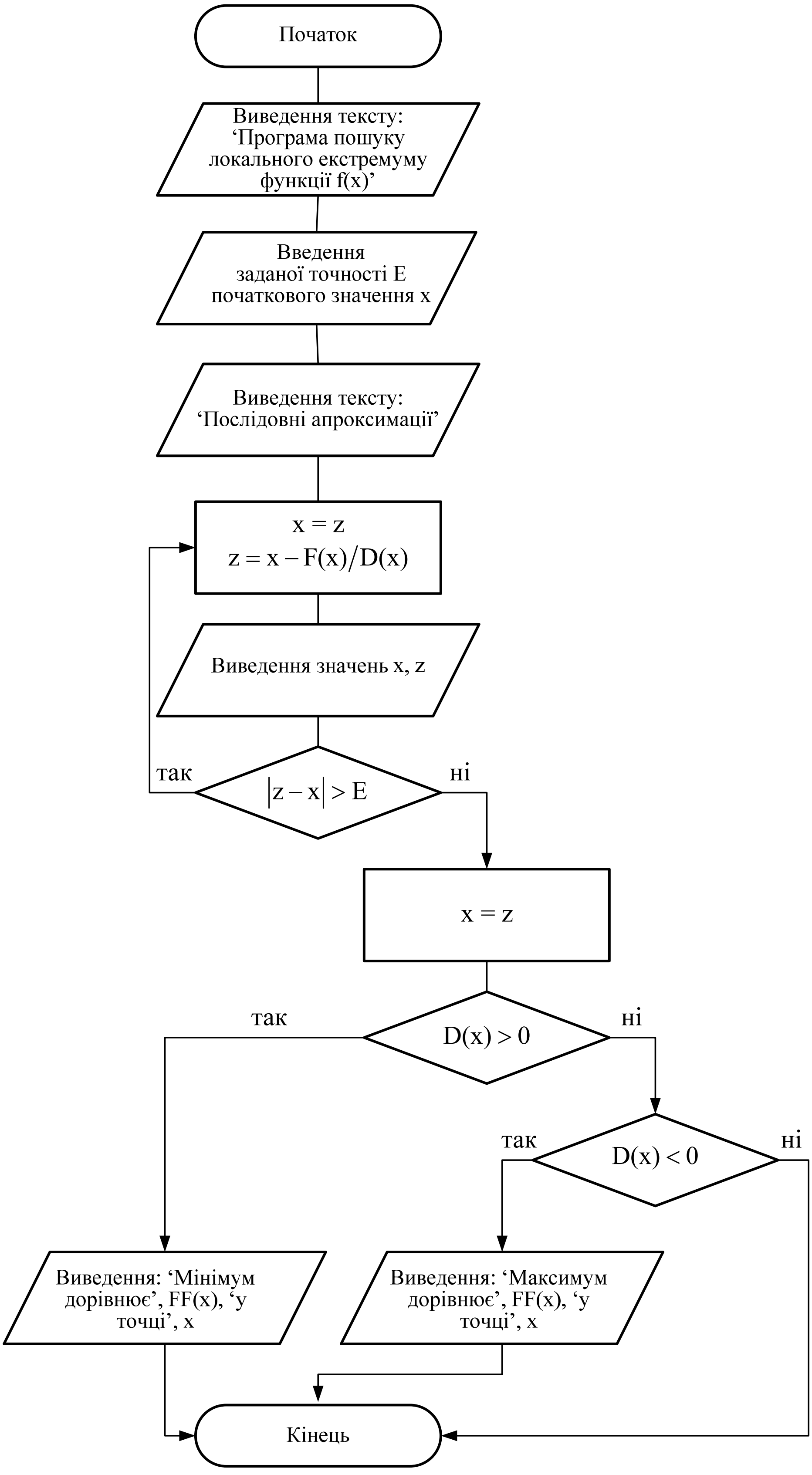


Рисунок 1.7 – Блок-схема пошуку локального екстремуму функції $f(x)$

Контрольні запитання

1. Що таке локальний і абсолютний екстремум функції однієї змінної?

2. Яка умова є достатньою для існування мінімуму функції однієї змінної? Запишіть її.

3. Яка умова є необхідною для існування мінімуму функції однієї змінної? Запишіть її.

4. Сформулюйте необхідні та достатні умови існування точки перегину деякої кривої.

5. Обґрунтуйте, що значить знайти розв'язок рівняння $f'(x) = 0$.

6. Який позитивний результат буде отриманий при знаходженні кореня рівняння $\varphi(x) = 0$ при використанні метода Ньютона.

7. У чому основна суть метода Ньютона? Запишіть основну розрахункову залежність.

8. Скільки можуть продовжуватися ітерації у цьому методі?

Завдання. Знайти екстремуми функцій з точністю до 0,0001 методом методом Ньютона (табл. А.1).

2. ПОШУК МЕТОДОМ ФІБОНАЧЧІ

2.1. Введення

Щоб знайти критичні точки, треба розв’язати рівняння $f'(x) = 0$, що не завжди просто зробити. В цьому випадку рівняння $f'(x) = 0$ можна розв’язати чисельним методом. Методи пошуку екстремумів функції $f(x)$ Фібоначчі та «Золотого перерізу» безпосередньо локалізують мінімум функції $f(x)$ у деякому інтервалі $a < x < b$. При цьому необхідно провести ряд обчислень функції у вибраних точках інтервалу (a, b).

Існує два можливих варіанти відповіді: знайти положення мінімуму у точці, що апроксимує його з потрібною точністю або знайти малий інтервал, в якому знаходиться мінімум. Задача полягає в тому, щоб досягти поставленої мети, проводячи найменшу кількість обчислень функції.

Припустимо, що функція має лише один мінімум в точці x^* на інтервалі (a, b). Таку функцію називають унімодальною. Отже, така функція може бути відображена залежністю, близькою до зображеної на рис. 2.1.

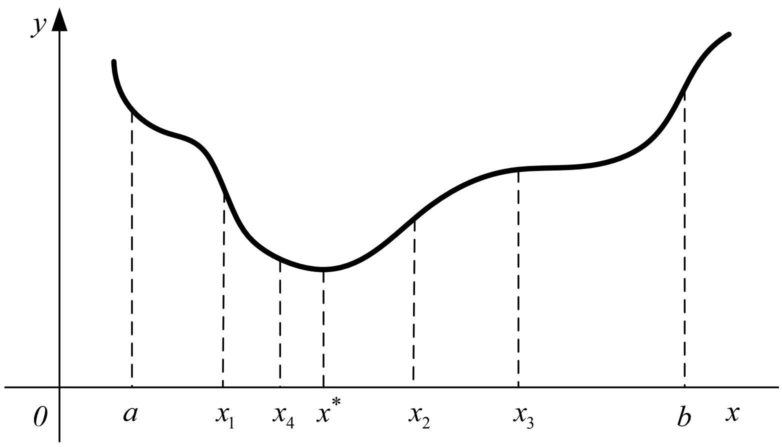


Рисунок 2.1 – Зображення унімодальної функції

Якщо відомі значення функції такого вигляду у трьох точках x_1, x_2, x_3, таких, що $a < x_1 < x_2 < x_3 < b$, а $f(x_2) < f(x_1)$ і $f(x_2) < f(x_3)$, то $x_1 < x^* < x_3$.

Таким чином, можна визначити інтервал (x_1, x_3), в якому буде знаходитися шукана точка x^*, менший за розміром, ніж інтервал (a, b).

На принципі звуження інтервалу невизначеності й будуть побудовані запропоновані нижче методи пошуку.

2.2. Пошук методом Фібоначчі

Припустимо, що потрібно визначити мінімум як можна точніше, але при цьому можна виконати тільки n обчислень функції. Для правильного вибору n точок необхідно зробити так, щоб значення функції, отримані у попередніх точках, визначали положення наступних точок т знаходилися як можна ближче до розв'язку.

Приступимо до розгляду методу Фібоначчі. Нехай є інтервал невизаченості (x_1, x_3) і відомо значення функції $f(x_2)$ всередині цього інтервалу (рис. 2.1). Припустимо, що значення функції дозволяється обчислити усього один раз в точці x_4, тому необхідно визначити її так, щоб отримати найменший можливий інтервал невизначеності.

Нехай $x_2 - x_1 = L$, $x_3 - x_2 = R$, причому $L > R$ и значення зафіксовані при відомих x_1, x_2, x_3. Якщо x_4 знаходиться в інтервалі (x_1, x_2), то:

- якщо $f(x_4) < f(x_2)$, то новим інтервалом невизначеності буде (x_1, x_2) довжиною $x_2 - x_1 = L$;
- якщо $f(x_4) > f(x_2)$, то новим інтервалом невизначеності буде (x_4, x_3) довжиною $x_3 - x_4$.

Оскільки невідомо, який з розглянутих випадків має місце, вибираємо x_4 так, щоб мінімізувати найбільшу з довжин $x_3 - x_4$ або $x_2 - x_1$. Досягти цього можливо, зробивши довжини $x_3 - x_4$ і $x_2 - x_1$ однаковими, тобто помістивши точку x_4 всередині інтервалу симетрично відносно точки x_2, що вже лежить всередині інтервалу. Будь-яке інше розташування точки x_4 може привести до того, що отриманий інтервал буде більшим за L. Помістивши точку x_4 всередині інтервалу симетрично відносно точки x_2, ми нічим не ризикуємо у будь-якому випадку.

Якщо виявиться, що можна виконати ще одне обчислення функції, то треба застосувати описану процедуру до інтервалу (x_1, x_2), в якому вже є значення функції $f(x_4)$ або до інтервалу (x_1, x_2), , в якому вже є значення функції $f(x_2)$. Отже, стратегія методу полягає в тому, що кожну наступну точку обчислення функції треба помістити всередині інтервалу невизначеності симетрично відносно точки, що вже там знаходиться.

На *n*-му обчисленні *n*-у точку треба помістити симетрично відносно $(n-1)$-ї точки. Положення кожної наступної точки залежить від нас, і для того, щоб отримати найбільше зменшення інтервалу на якомусь етапі, треба розділити навпіл попередній інтервал. Тоді точка x_n буде співпадати з точкою x_{n-1}. Але в цьому випадку ми не отримаємо нової інформації, тому зазвичай точки x_{n-1} і x_n розміщують на відстані $\varepsilon/2$ по обидва боки від середини відрізка L_{n-1}. Величину ε задають довільно або вона співпадає з мінімально можливою відстанню між двома точками.

Для кращого розуміння проілюструємо метод на рис. 2.2.

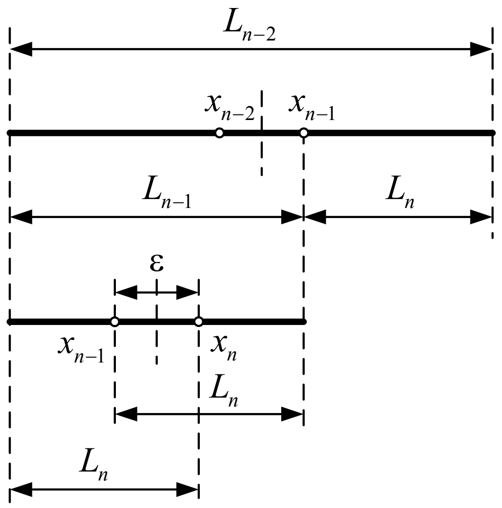


Рисунок 2.2 – Графічна ілюстрація методу Фібоначчі

Побудуємо інтервал довжиною L_{n-1}, оскільки доведення йде «від зворотного», тобто в бік збільшення інтервалу невизначеності функції. Розмістимо на ньому точку x_{n-1} і симетрично до центра інтервалу L_{n-1}, на відстані $\varepsilon/2$ знайдемо точку x_n.

Довжину найменшого інтервалу невизначеності позначимо L_n, тоді

$$L_{n-1} = 2L_n - \varepsilon .$$

Попереднім етапом наближення до розв'язання є інтервал L_{n-2}, на якому точки x_{n-1} і x_{n-2} розташовуються симетрично на відстані L_{n-1} від кінців інтервалу. Отже,

$$L_{n-2} = L_{n-1} + L_n .$$

Аналогічно було б для L_{n-3}:

$$L_{n-3} = L_{n-2} + L_{n-1} .$$

Тому, взагалі

$$L_{j-1} = L_j + L_{j+1} .\text{при } 1 < j < n .$$

Таким чином,

$$L_{n-1} = 2L_n - \varepsilon$$

$$L_{n-2} = L_{n-1} + L_n = 3L_n - \varepsilon$$

$$L_{n-3} = L_{n-2} + L_{n-1} = 5L_n - 2\varepsilon$$

$$L_{n-4} = L_{n-3} + L_{n-2} = 8L_n - 3\varepsilon \text{ і т.д.}$$

Якщо визначити послідовність чисел Фібоначчі у вигляді коефіцієнтів перед ε так:

$$F_0 = 1,\ F_1 = 1 \text{ і } F_k = F_{k-1} + F_{k-2} \text{ для } k = 2, 3, \ldots,$$

то

$$L_{n-j} = F_{j+1}L_n - F_{j-1}\varepsilon \text{ для } j = 1, 2, \ldots, n-1 .$$

Якщо початковий інтервал (a, b) має довжину $L_1 = b - a$, то

$$L_1 = F_n L_n - \varepsilon F_{n-2},$$

тобто

$$L_n = \frac{L_1}{F_n} + \varepsilon \frac{F_{n-2}}{F_n}.$$

Отже, ми отримаємо найкращий результат, зробивши n обчислень функції для зменшення початкового інтервалу невизначеності в $\frac{1}{F_n}$ разів у порівнянні з його початковою довжиною.

Пошук можна продовжити, використовуючи описане вище правило симетрії. Очевидно, що необхідно знайти положення першої точки, яка розташовується на відстані L_2 від одного з кінців початкового інтервалу, причому неважно, від якого кінця, оскільки друга точка розташовується відповідно до правила симетрії на відстані L_2 від другого кінця інтервалу:

$$L_2 = F_{n-1} L_n - \varepsilon F_{n-3} = F_{n-1} \frac{L_1}{F_n} + \varepsilon \frac{(F_{n-1} F_{n-2} - F_n F_{n-3})}{F_n} = \frac{F_{n-1}}{F_n} L_1 + \frac{(-1)^n \varepsilon}{F_n}.$$

Після знаходження першої точки, числа Фібоначчі більше не потрібні.

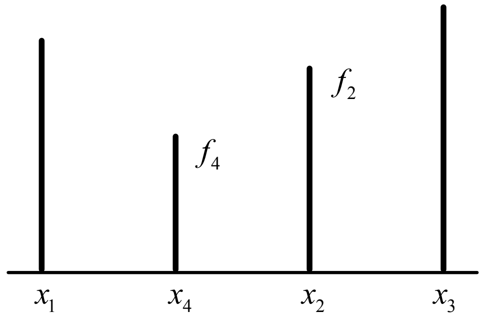
Таким чином, пошук методом Фібоначчі, названим так тому, що при пошуку з'являються числа Фібоначчі, є ітераційною процедурою. У процесі пошуку інтервалу (x_1, x_2) з точкою x_2, що лежить у цьому інтервалі, наступна точка x_4 завжди вибирається такою, що

$$x_3 - x_4 = x_2 - x_1 \text{ або } x_4 - x_1 = x_3 - x_2,$$

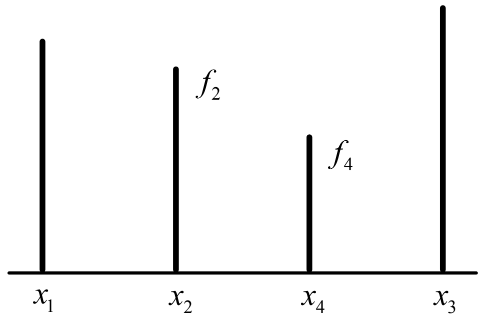
тобто

$$x_4 = x_1 - x_2 + x_3.$$

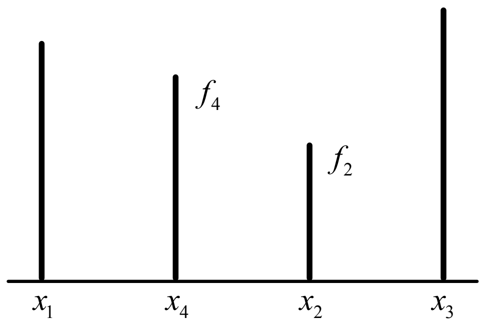
Якщо $f(x_2) = f_2$ і $f(x_4) = f_4$, то можна розглянути чотири випадки (рис. 2.3).



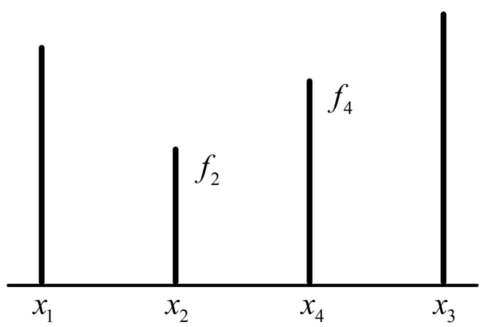
а



б



в



г

Рисунок 2.3 – Чотири випадки пошуку точок Фібоначчі:
а – $x_4 < x_2$, $f_4 < f_2$. Новий інтервал (x_1, x_2), що містить точку x_4;
б – $x_4 > x_2$, $f_4 < f_2$. Новий інтервал (x_2, x_3), що містить точку x_4;
в – $x_4 < x_2$, $f_4 > f_2$. Новий інтервал (x_4, x_3), що містить точку x_2;
г – $x_4 > x_2$, $f_4 > f_2$. Новий інтервал (x_1, x_4), що містить точку x_2

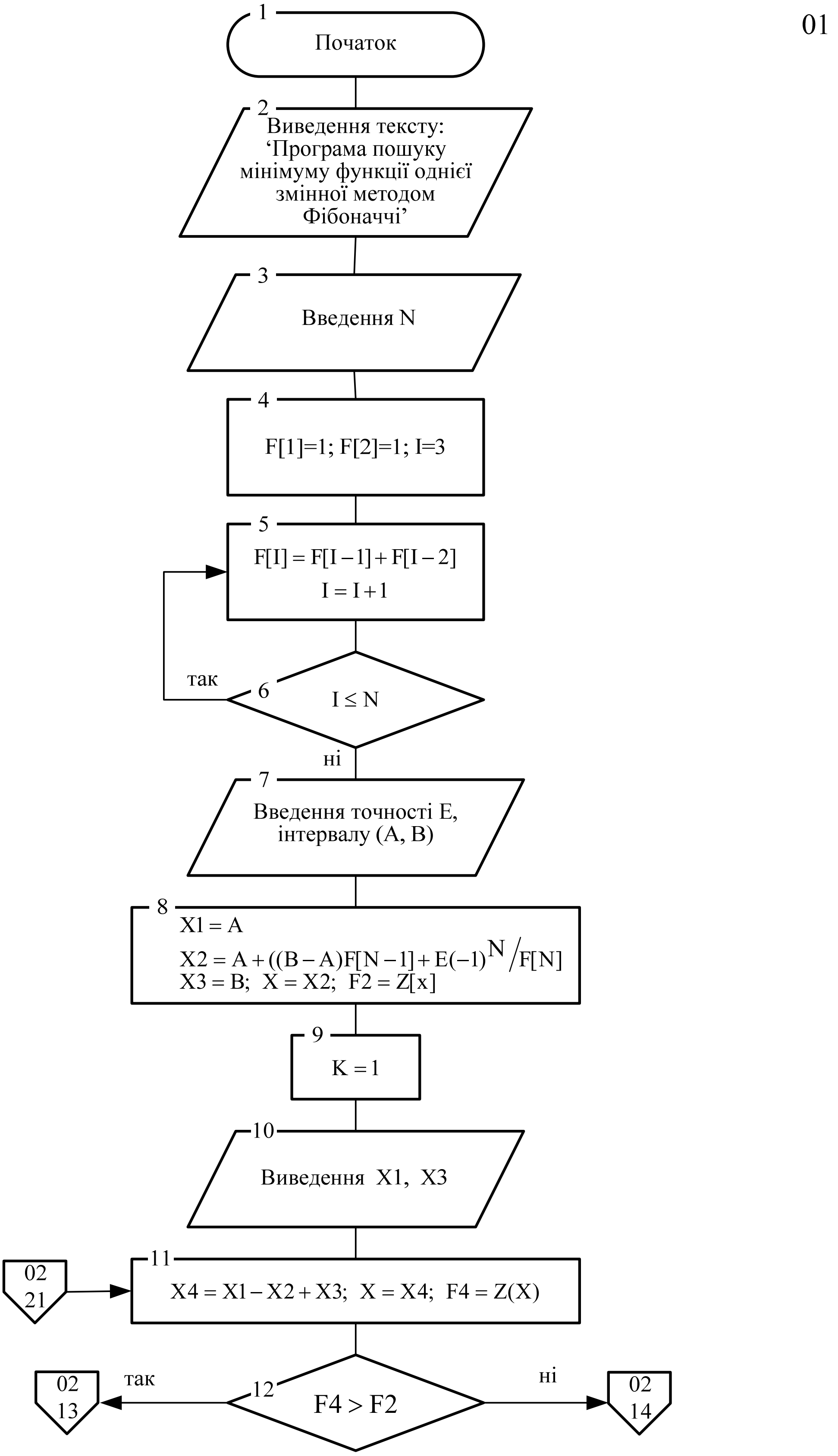


Рисунок 2.4 – Блок-схема програми пошуку мінімуму функції однієї змінної методом Фібоначчі (початок)

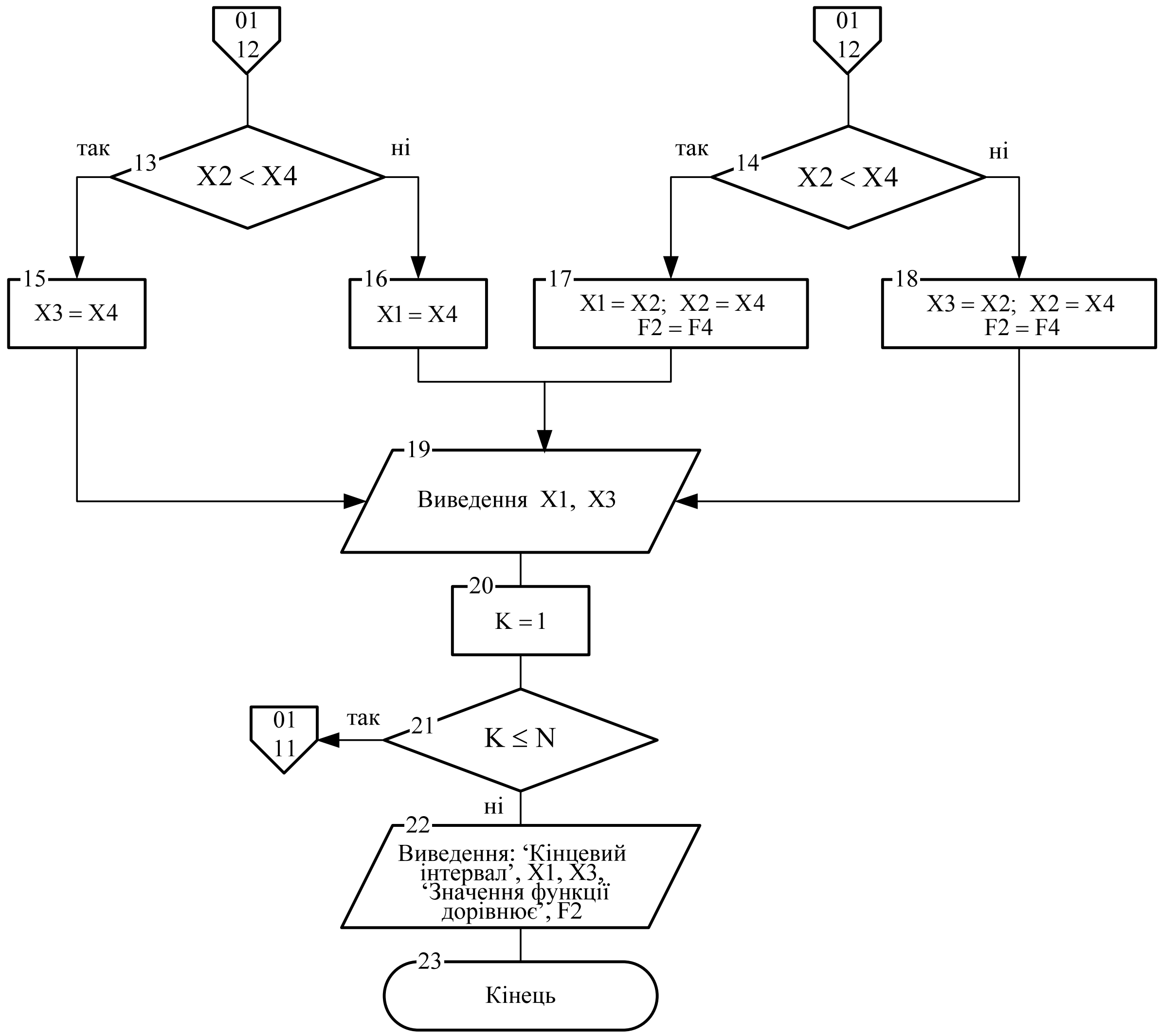


Рисунок 2.4 – Блок-схема програми пошуку мінімуму функції однієї змінної методом Фібоначчі (кінець)

У задачу студента входить самостійне створення програми за наданою схемою(див. рис. 2.4) та її реалізація у відповідності з виданим викладачем варіантом функціональної залежності (табл. А.1).

Контрольні запитання

1. У чому полягає загальна стратегія пошуку мінімуму функції $f(x)$ у методах пошуку для функції однієї змінної.

2. Які два варіанти розв’язання вам відомі для визначення мінімуму функції однієї змінної?

3. Як вибрати n точок обчислення функції пошуком методом Фібоначчі?

4. Як розмістити на відрізку неозначеності кожну наступну n-у точку відносно попередньої (n – 1)-ї точки?

5. На якому принципі основане доведення головної розрахункової залежності методу Фібоначчі?

6. Що таке числа Фібоначчі, яке їхнє призначення?

7. Як можна визначити значення ε?

8. В чому основна суть методу Фібоначчі?

9. Покажіть графічно, які чотири випадки можуть бути при пошуку нового інтервалу неозначеності методом Фібоначчі.

З а в д а н н я. Знайти мінімум функції однієї змінної методом Фібоначчі (табл. А.1).

3. ПОШУК МЕТОДОМ «ЗОЛОТОГО ПЕРЕРІЗУ»

3.1. Введення

Пошук методом «золотого перерізу» майже такий же ефективний, як і метод Фібоначчі і є його окремим випадком, але при цьому не потрібно знати n – кількість обчислень функції, що визначається спочатку.

У випадку, коли задана функція $f(x)$ недиференційована й її похідну важко апроксимувати, пошук мінімумів функції проводять двома етапами.

Перший етап полягає у виділені проміжків аргументу x, в яких існує єдина точка x^*, де функція $f(x)$ має один екстремум, тобто є унімодальною. Зазвичай відрізки унімодальності знаходять на основі аналізу спрощених математичних моделей досліджуваних процесів.

Другий етап передбачає уточнення місця розташування минимумів на проміжках унімодальності.

Нехай функція $f(x)$ унімодальна на інтервалі невизначеності (a,b), тоді необхідно побудувати таку послідовність $\{x_k\}$, щоб мінімум функції знаходився в інтервалі

$$(x_{j-1}, x_j),\ \text{тобто}\ x_{j-1} < x^* < x_j .$$

Алгоритм вибору елементів послідовності $\{x_k\}$ називають стратегією пошуку.

Оптимальною є стратегія, що приводить до найменшого інтервалу невизначеності (x_{j-1}, x_j).

Як уже відомо з попереднього методу, стратегія пошуку є оптимальною, якщо для побудови послідовності $\{x_k\}$ використати числа Фібоначчі F_k:

$$F_{k+1} = F_{k-1} + F_k,\ F_0 = 1,\ F_1 = 1.$$

Недоліком методу Фібоначчі є залежність точок, в яких обчислюють функцію $f(x)$, від загальної кількості обчислень n, оскільки на першій ітерації точку x_1 вибирають за умови ділення інтервалу (a,b) у співвідношенні F_{N-1}/F_N.

3.2. Пошук методом «золотого перерізу»

Для співвідношення F_{N-1}/F_N встановлена границя:

$$g = \lim_{N \to \infty} F_{N-1}/F_N = 0{,}618034\ldots$$

Поділ відрізку у співвідношенні g називають «золотим перерізом», оскільки в цьому випадку відношення довжини більшої частини відрізка до усієї його довжині дорівнюватиме відношенню довжини меншої частини до довжини більшої частини – це визначення методу «*золотого перерізу*».

Приймаючи довжину відрізка за одиницю, з визначення «золотого перерізу» будемо мати:

$$g = \frac{1-g}{g}.$$

Приведемо це рівняння до квадратного:

$$g^2 + g - 1 = 0.$$

Знайдемо додатний корінь цього рівняння:

$$g = (-1+\sqrt{5})/2 = 0{,}618.$$

Суть методу «золотий переріз» такий: на кожній ітерації пошуку мінімуму інтервал невизначеності (a,b) поділяють у співвідношенні g (точка x_1), а другу точку x_2 вибирають симетрично точці x_1 відносно середини відрізка. При цьому вибір чергового інтервалу невизначеності відбувається як і в методі Фібоначчі, на основі унімодальності функції.

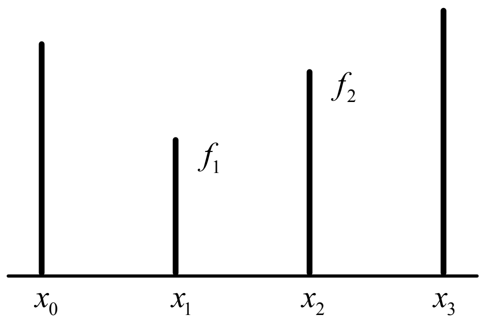
У методі «золотого перерізу» розташування точок поділу x_1 і x_2 відрізку (a,b) не залежить від усієї кількості ітерацій N і обчислення закінчують, коли довжина інтервалу невизначеності стає меншою за задану величину похибки E.

Після N обчислень функції інтервал невизначеності

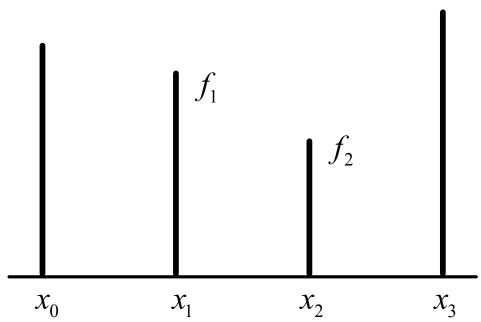
$$R = (b - a)g^{N-1},$$

Що дозволяє оцінити кількість ітерацій, необхідну для виконання алгоритму із заданою похибкою.

При цьому, якщо шукають інтервал (x_0, x_3), і є два значення функції f_1 і f_2 в точках x_1 і x_2, то необхідно дослідити два випадки (рис. 3.1):



а



б

Рисунок 3.1 – Дослідження двох випадків пошуку кількості ітерацій:
а – $f_1 < f_2$. Новий інтервал (x_0, x_2);
б – $f_1 > f_2$. Новий інтервал (x_1, x_3)

Блок-схема, що реалізує пошук методом «золотого перерізу», показана на рис. 3.2.

Метод «золотого перерізу» незначно поступається методу Фібоначчі за точністю знаходження інтервалу неозначеності (не більше 17%).

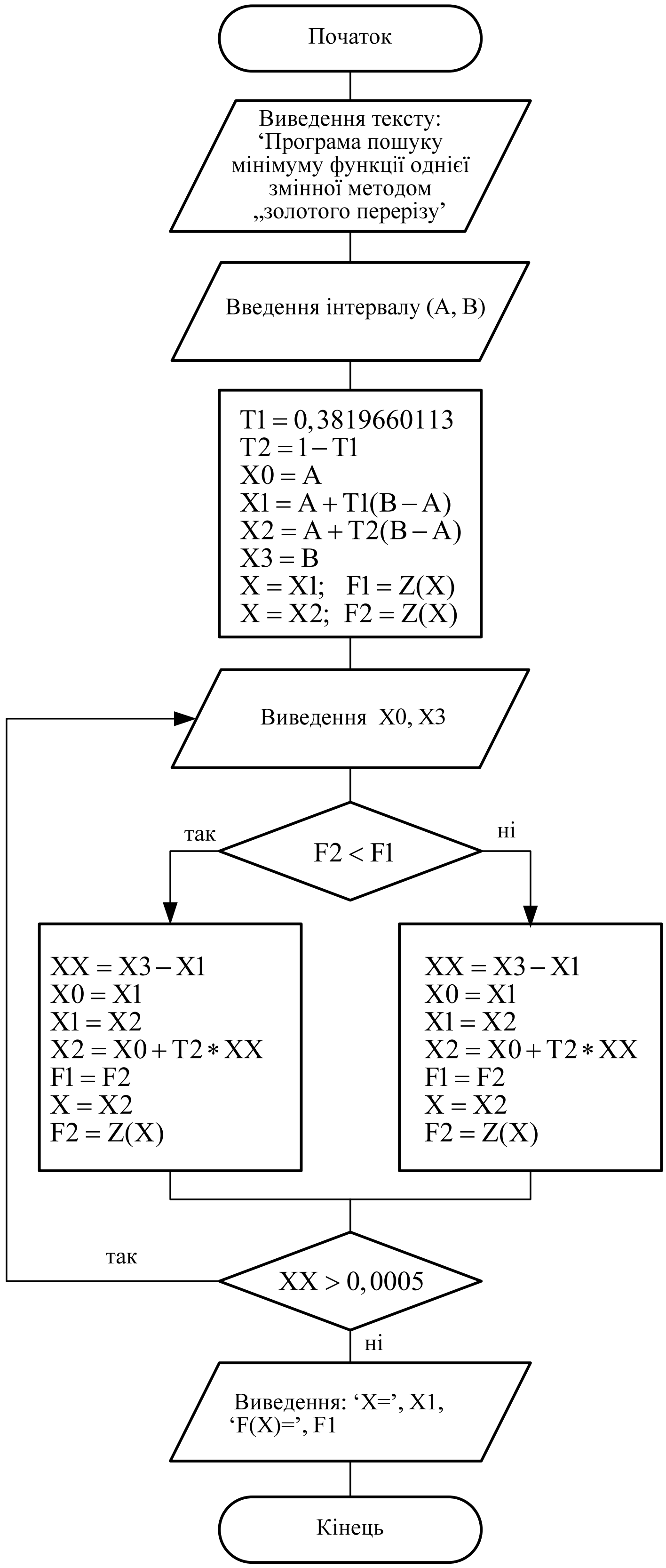


Рисунок 3.2 – Блок-схема програми пошуку мінімуму функції однієї змінної методом «золотого перерізу»

Контрольні запитання

1. Якою є головна відмінність пошуку мінімуму функції методами «золотого перерізу» та Фібоначчі?
2. Як шукати мінімум функції однієї змінної $f(x)$, якщо функція недиференційовна й її похідну важко апроксимувати?
3. Яка функція називається унімодальною?
4. Що таке стратегія пошуку мінімуму функції однієї змінної і коли вона вважається оптимальною?
5. Що таке «золотий переріз»? Дайте означення методу «золотий переріз».
6. У чому смисл методу «золотий переріз»?
7. Яка основна залежність, що характеризує довжину інтервалу неозначеності функції в результаті n обчислень?
8. Покажіть графічно два можливі випадки пошуку інтервалу невизначеності методом «золотий переріз».
9. Яка величина дозволяє оцінити кількість ітерацій, необхідних для виконання алгоритму зі заданою похибкою?
10. Яким із розглянутих вище методів можна досягти найбільшої точності обчислень?

У задачу студента входить самостійне створення програми за наданою схемою(див. рис. 3.2) та її реалізація у відповідності з виданим викладачем варіантом функціональної залежності (табл. А.1)

Завдання. Показати, що функція $f(x)$ унімодальна та знайти мінімальне значення функції $f(x)$ і точку мінімуму $x_{\min}$ на відрізку $[a, b]$ з точністю $\varepsilon = 10^{-3}$ згідно з номером варіанта (табл. А.1).

4. МЕТОД КВАДРАТИЧНОЇ ІНТЕРПОЛЯЦІЇ

Метод квадратичної інтерполяції (метод Пауела) використовують для пошуку точки мінімуму x^* безперервної функції однієї змінної $f(x)$.

Ідея методу полягає в такому:

1) у невеликій околиці значень x поблизу передбачуваної точки мінімуму x^* вибирають три точки й виконують апроксимацію початкової функції $f(x)$ квадратичною функцією (параболою), що проходить через ці точки;

2) знаходять точку мінімуму квадратичної функції, і її значення приймають як наближення точки мінімуму початкової функції.

Розглянемо математичну реалізацію методу. Нехай відомі значення функції у трьох точках x_1, x_2, x_3, що дорівнюють відповідно f_1, f_2, f_3. При інтерполяції значення апроксимуючої параболи $\varphi(x)$ у цих точках повинні збігатися зі значеннями початкової функції. Тоді функція $f(x)$ може бути апроксимована квадратичною функцією

$$\varphi(x) = a_1 x^2 + a_2 x + a_3, \tag{4.1}$$

де a_1, a_2, a_3 визначають із системи рівнянь

$$\begin{aligned} a_1 x_1^2 + a_2 x_1 + a_3 &= f_1; \\ a_1 x_2^2 + a_2 x_2 + a_3 &= f_2; \\ a_1 x_3^2 + a_2 x_3 + a_3 &= f_3. \end{aligned} \tag{4.2}$$

Виконавши ряд перетворень, одержимо:

$$\begin{gathered} a_1 = [(x_3 - x_2) f_1 + (x_1 - x_3) f_2 + (x_2 - x_1) f_3] / \Delta; \\ a_2 = [(x_2^2 - x_3^2) f_1 + (x_3^2 - x_1^2) f_2 + (x_1^2 - x_2^2) f_3] / \Delta; \\ a_3 = [x_2 x_3 (x_3 - x_2) f_1 + x_3 x_1 (x_1 - x_3) f_2 + x_1 x_2 (x_2 - x_1) f_3] / \Delta, \end{gathered} \tag{4.3}$$

де

$$\Delta = (x_1 - x_2)(x_2 - x_3)(x_3 - x_1) .$$

Точку екстремуму функції $\varphi(x)$ визначають з необхідної умови існування екстремуму

$$\varphi'(x) = 2a_1 x + a_2 = 0 , \tag{4.4}$$

причому вона є точкою мінімуму, якщо

$$\varphi''(x) = 2a_1 > 0 . \tag{4.5}$$

У цьому випадку функція $\varphi(x)$ має мінімум у точці

$$x_4 = -a_2 / (2a_1) , \tag{4.6}$$

якщо $a_1 > 0$.

Отже, враховуючи формули (4.3) та (4.6), як наближення точки мінімуму початкової функції $f(x)$ можна прийняти значення

$$x_4 = \frac{(x_2^2 - x_3^2) f_1 + (x_3^2 - x_1^2) f_2 (x_1^2 - x_2^2) f_3}{2[(x_2 - x_3) f_1 + (x_3 - x_1) f_2 + (x_1 - x_2) f_3]} . \tag{4.7}$$

Розглянемо взаємне розташування точок x_1, x_2, x_3, x_4 і значення функції $f(x)$ у них. Відкинемо одну із цих точок і позначимо їх таким чином, щоб для трьох точок x_1, x_2, x_3, що залишилися, виконувалися нерівності

$$f(x_1) \le f(x_2) \le f(x_3)$$

і точки розташовувалися так, як на рис. 4.1, *а* або 4.1, *б*.

Знайдемо нове наближення x_4 точки мінімуму початкової функції за допомогою квадратичної інтерполяції, виберемо три нові точки x_1, x_2, x_3

для знаходження наступного наближення x_4 і т. д. Процес пошуку повторюється доти, поки довжина інтервалу невизначеності (відстань між двома точками x_1 і x_2 з найменшими значеннями функції $f(x)$ або різниця цих двох значень функції f_1 і f_2 у цих точках) не стане меншою за задану точність обчислень.

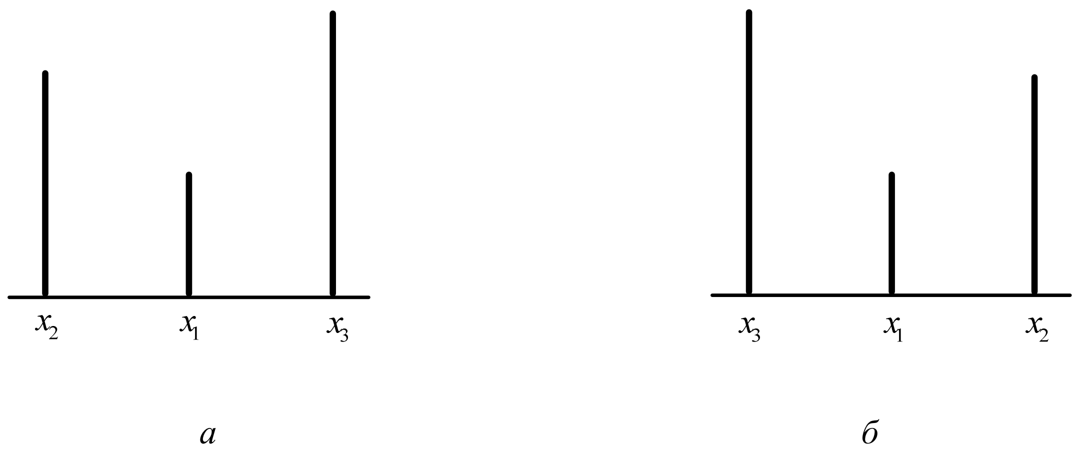


Рисунок 4.1 – Розташування точок інтерполяції функції

У міру наближення до мінімуму величини x_1, x_2, x_3 та відповідні їм значення функції f_1, f_2, f_3, що входять до формули (4.7), усе більш зближуються. При цьому використання формули (4.7) може призвести до обчислювальних труднощів через втрату точності в результаті віднімання близьких величин. Тому формулу приводять до більш зручного для обчислень виду:

$$x_4 = \frac{x_1 + x_2}{2} + \frac{(f_1 - f_2)(x_2 - x_3)(x_3 - x_1)}{2[(x_2 - x_3)f_1 + (x_3 - x_1)f_2 + (x_1 - x_2)f_3]} \qquad (4.8)$$

і для другої та наступних апроксимацій використовують саме її.

Перший доданок у формулі (4.8) не страждає від втрати точності при зближенні точок. Другий доданок малий у порівнянні з першим і вплив його похибки через втрату точності на кінцевий результат невеликий.

Розглянемо програмну реалізацію методу. Обчислювальна процедура пошуку мінімуму функції $f(x)$ має такі кроки:

1. Ввести початкове значення a, крок h, що є величиною того ж порядку, що й відстань від точки a до точки дійсного мінімуму x^*, а також точність обчислень ε.

2. Обчислити координати першої та другої точок інтерполяції $x_1 = a$, $x_2 = a + h$. Обчислити значення функції в цих точках $f_1 = f(x_1)$ і $f_2 = f(x_2)$.

3. Якщо $f_1 < f_2$, обчислити координату третьої точки $x_3 = a - h$ (рис. 4.2, *а*), інакше обчислити $x_3 = a + 2h$ (рис. 4.2, *б*). Обчислити значення функції в цій точці $f_3 = f(x_3)$.

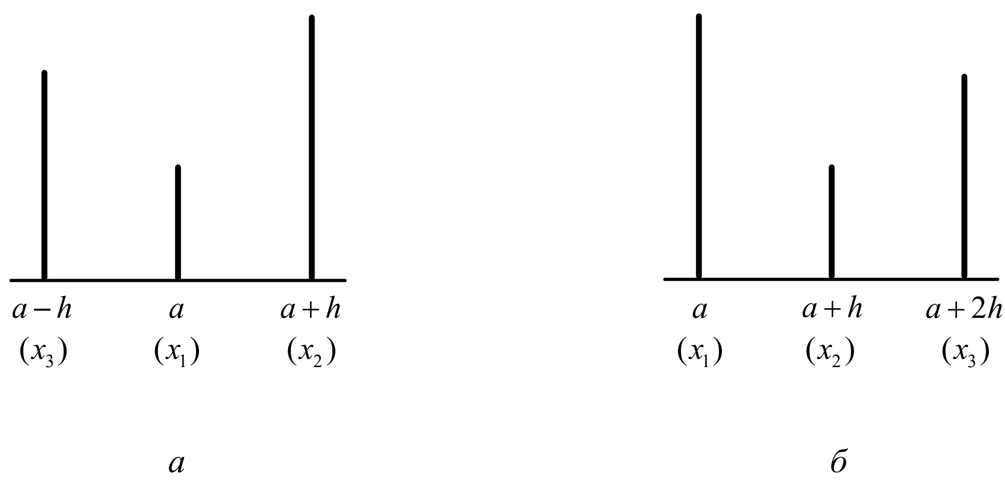


Рисунок 4.2 – Розташування початкових точок інтерполяції функції

4. Задати номер ітерації $N = 1$. Виконати першу апроксимацію точки мінімуму x_4 початкової функції згідно з формулою (4.7). Обчислити значення функції в цій точці $f_4 = f(x_4)$.

5. Упорядкувати чотири точки x_1, x_2, x_3, x_4 за зростанням значень f_1, f_2, f_3, f_4.

6. Якщо $|x_1 - x_2| \geq \varepsilon$, перейти до наступного кроку 7, інакше перейти до кроку 8.

7. Збільшити номер ітерації $N = N + 1$. Вибрати три точки інтерполяції функції.

Виконати наступну апроксимацію точки мінімуму x_4 початкової функції згідно з формулою (4.8). Обчислити значення функції в цій точці $f_4 = f(x_4)$.

8. Якщо $|x_1 - x_2| < \varepsilon$, перейти до наступного кроку 9, інакше повернутися до кроку 5.

9. Вивести обчислене значення точки мінімуму x_1 початкової функції. Обчислити та вивести мінімальне значення функції в цій точці $f_1 = f(x_1)$. Вивести кількість ітерацій *N*.

Блок-схема пошуку мінімуму функції $f(x)$ методом квадратичної інтерполяції наведена на рис. 4.3. Вона містить у собі блок-схему обчислення значення самої заданої функції. Як приклад розглянута функція $f(x) = 2x^2 - e^x$.

У табл. А.2 наведено варіанти завдань для пошуку мінімуму функції методом квадратичної інтерполяції. Потрібно знайти мінімум заданої функції $f(x)$ з точністю обчислень $\varepsilon = 0.001$.

Вид функції $f(x)$, початкове значення *a*, а також крок *h* обирають з табл. А.2 згідно з номером варіанта.

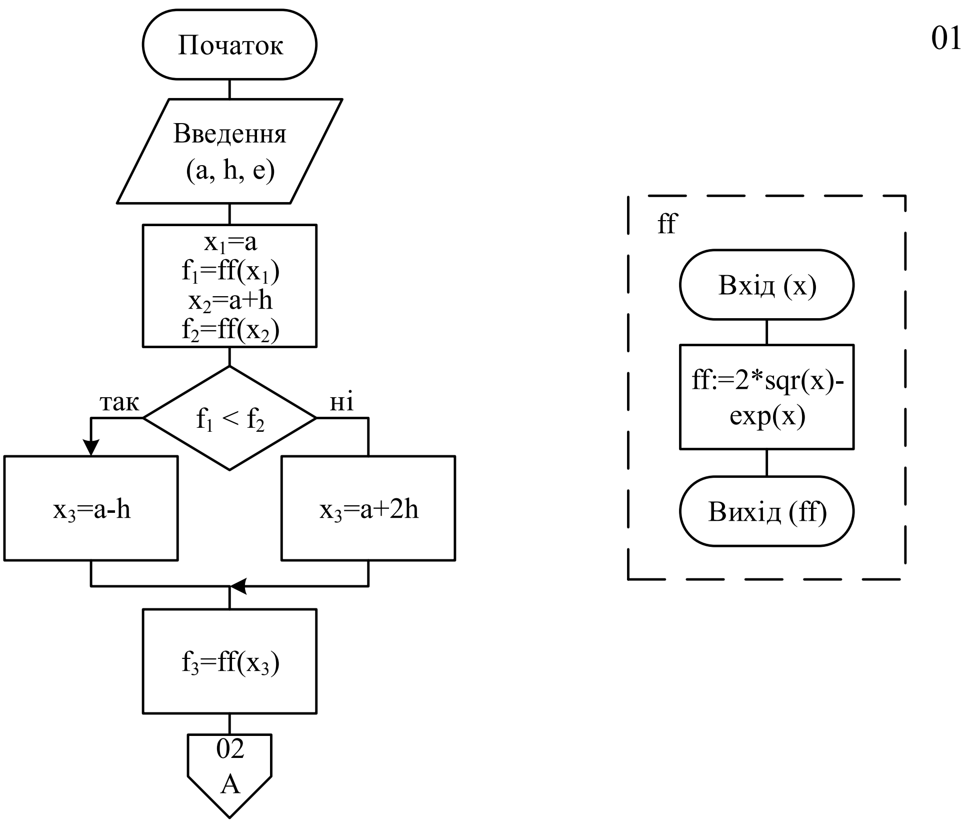


Рисунок 4.3 – Блок-схема пошуку мінімуму функції $f(x) = 2x^2 - e^x$ методом квадратичної інтерполяції (початок)

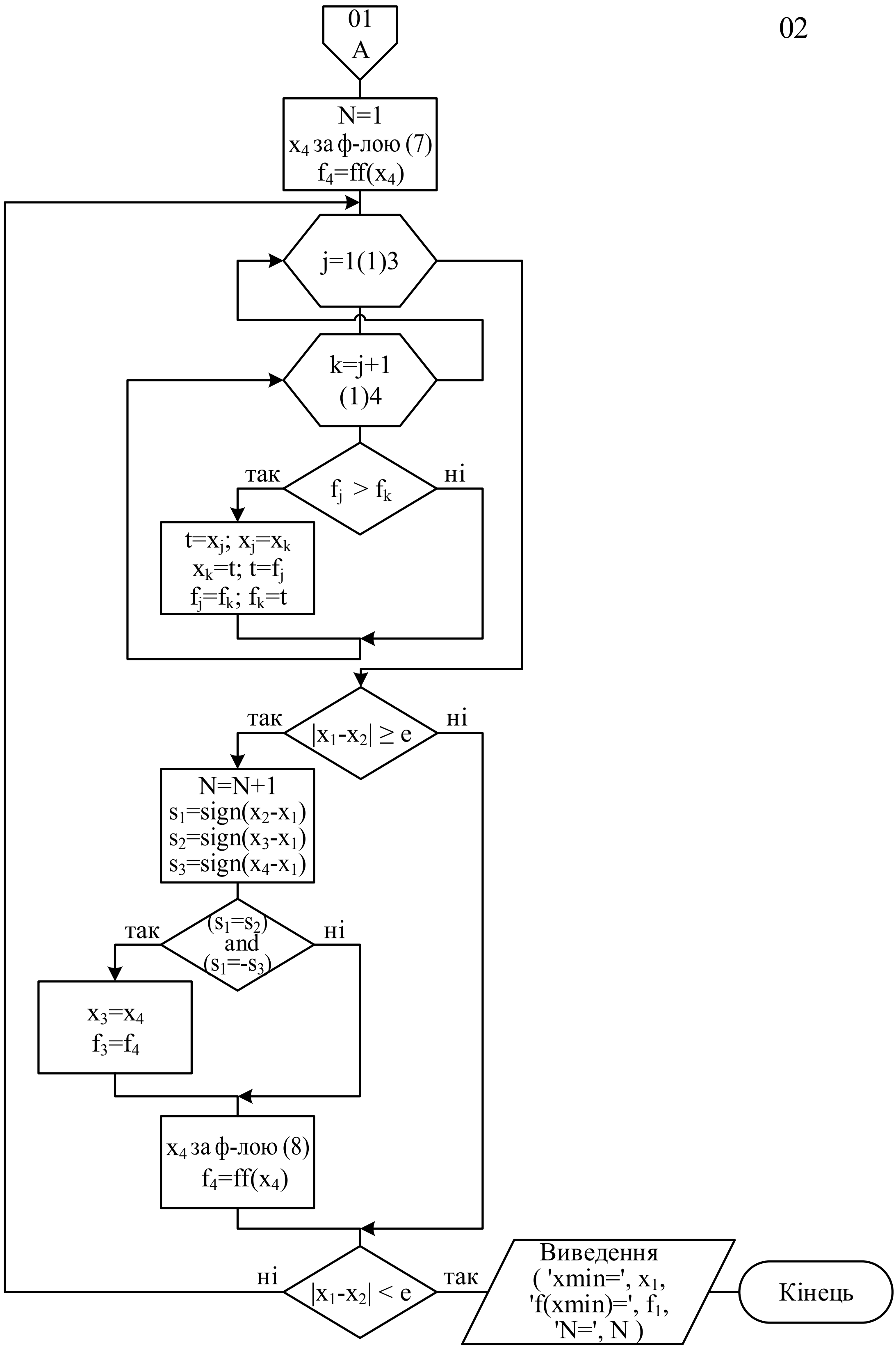


Рисунок 4.3 – Блок-схема пошуку мінімуму функції $f(x) = 2x^2 - e^x$ методом квадратичної інтерполяції (кінець)

Контрольні запитання

1. Екстремуми яких функцій можна знайти за допомогою методу квадратичної інтерполяції?

2. У чому полягає ідея методу квадратичної інтерполяції?

3. Яке значення приймається як наближення точки мінімуму функції при пошуку методом квадратичної інтерполяції?

4. Що є умовою закінчення пошуку методом квадратичної інтерполяції?

5. Які обчислювальні труднощі виникають при використанні методу квадратичної інтерполяції?

У задачу студента входить самостійне створення програми за наданою схемою(див. рис. 4.3) та її реалізація у відповідності з виданим викладачем варіантом функціональної залежності (табл. А.2)

З а в д а н н я. Знайти мінімум функції методом квадратичної інтерполяції згідно з номером варіанта (табл. А.2).

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Банди Б. Методы оптимизации. Вводный курс / Банди Б. – М. : Радио и связь, 1988. – 127 с.

2. Зуев Е.А. Программирование на языке TURBO PASCAL/6/0, 7/0 / Е.А. Зуев. – М. : Радио и связь, 1993. – 384 с.

3. Бермант А.Ф. Краткий курс математического анализа : для втузов /А.Ф. Бермант, И.Г. Араманович. – М. : Наука, 1969. – 736 с.

ДОДАТКИ

Додаток А

Таблиця А.1. Варіанти завдань для пошуку екстремуму функції методами Ньютона, Фібоначчі та «золотого перерізу»

№ варіанта	Вид функції $f(x)$	Відрізок $[a, b]$
1	2	3
1	$f(x)=(x+2)/x^2-x$	$[-1; -0,5]$
2	$f(x)=x+1/\ln(x)$	$[1,5; 2,5]$
3	$f(x)=x+\ln^2(x)$	$[0,3; 1]$
4	$f(x)=x-\ln(\ln(x))$	$[1,3; 2,3]$
5	$f(x)=x+1/\mathrm{arctg}(x)$	$[0,5; 1,5]$
6	$f(x)=e^{-x}+x^2$	$[0; 1]$
7	$f(x)=e^{-x}-1/x$	$[-1; -0,5]$
8	$f(x)=e^{1/x}+\ln(x)$	$[1; 3]$
9	$f(x)=e^{-x}+1/(1-x)$	$[-0,5; 0,5]$
10	$f(x)=-\mathrm{tg}(x)-1/x$	$[-1; -0,5]$
11	$f(x)=e^{x}+x^2$	$[-1; 0]$
12	$f(x)=e^{x}+1/x$	$[0,5; 1]$
13	$f(x)=e^{x}-\ln(x)$	$[0,3; 1]$
14	$f(x)=e^{x}+1/(x+1)$	$[-0,5; 0,5]$
15	$f(x)=\mathrm{tg}(x)+1/x$	$[0,5; 1]$
16	$f(x)=\mathrm{tg}(x)+e^{-x}+x$	$[-1; 0]$
17	$f(x)=x^2+\sin(x)$	$[-1; 0]$

Продовження табл. А.1

1	2	3
18	$f(x)=e^x-\sin(x)$	$[0;1]$
19	$f(x)=x^4+2x^2+4x$	$[-1;0]$
20	$f(x)=xe^x+x^2$	$[-1;0]$
21	$f(x)=e^x-\mathrm{tg}(x)-x$	$[0;1]$
22	$f(x)=x^2-\sin(x)$	$[0;1]$
23	$f(x)=e^{-x}+\sin(x)$	$[-1;0]$
24	$f(x)=x^4+2x^2-4x$	$[0;1]$
25	$f(x)=x^2-xe^{-x}$	$[0;1]$
26	$f(x)=x+(2-x)/x^2$	$[0,5;1]$
27	$f(x)=1/x-1/\ln(x)$	$[0,3;0,7]$
28	$f(x)=1/x+\ln^2(x)$	$[1;3]$
29	$f(x)=e^{1/x}+\ln(x)$	$[1;3]$
30	$f(x)=e^{-x}+1/x$	$[0,5;1,5]$

Таблиця А.2. Варіанти завдань для пошуку мінімуму функції методом квадратичної інтерполяції

№ варіанта	Вид функції $f(x)$	Початкове значення a	Крок h
1	2	3	4
1	$(x+2)/x^2 - x$	–1,25	0,75
2	$x + 1/\ln x$	2,0	0,5
3	$x + \ln^2(x)$	0,65	0,35
4	$x - \ln(\ln(x))$	1,8	0,5
5	$x + 1/\mathrm{arctg}(x)$	1,0	0,5
6	$e^{-x} + x^2$	0,5	0,5
7	$e^{-x} - 1/x$	–0,75	0,25
8	$e^{1/x} + \ln(x)$	2,0	1,0
9	$e^{-x} + 1/(1-x)$	0,1	0,5
10	$-\mathrm{tg}(x) - 1/x$	–0,75	0,25
11	$e^{x} + x^2$	–0,5	0,5
12	$e^{x} + 1/x$	0,75	0,25
13	$e^{x} - \ln(x)$	0,65	0,35
14	$e^{x} + 1/(x+1)$	0,1	0,5
15	$\mathrm{tg}(x) + 1/x$	0,75	0,25
16	$\mathrm{tg}(x) + e^{-x} + x$	–2,0	0,1
17	$x^2 + \sin(x)$	–0,5	0,5
18	$e^{x} - \sin(x)$	–4,5	0,5
19	$x^4 + 2x^2 + 4x$	–0,5	0,5
20	$xe^{x} + x^2$	–0,3	0,4

Продовження табл. А.2

1	2	3	4
21	$e^x - \mathrm{tg}(x) - x$	2,0	0,1
22	$x^2 - \sin(x)$	0,5	0,5
23	$e^x + \sin(x)$	4,5	0,5
24	$x^4 + 2x^2 - 4x$	0,5	0,5
25	$x^2 - xe^{-x}$	0,3	0,4
26	$x + (2 - x)/x^2$	1,25	0,75
27	$1/x - 1/\ln(x)$	0,5	0,2
28	$1/x + \ln^2(x)$	1,5	0,5
29	$e^{1/x} + \ln(x)$	2,0	1,0
30	$e^{-x} + 1/x$	1,5	0,5

ЗМІСТ

Навчальне видання

КОБЕЦЬ Олена Валентинівна
ТРЕТЯК Тетяна Євгенівна
СКЛЕПУС Валентина Олександрівна

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ
до виконання лабораторних робіт
з курсу «Комп'ютерне забезпечення»

для студентів спеціальності «Прикладна механіка»
денної, заочної та дистанційної форм навчання

Відповідальний за випуск Шелковий О.М.

Роботу до видання рекомендував Крутіков Г.А.

В авторській редакції

Комп'ютерний набір і макетування В.О. Склепус

План 2018 р., поз. 371

Підп. до друку 2018 р. Формат 60х84 1/16. Папір офсетний. Riso-друк. Гарнітура Таймс. Ум. друк. арк. 3,2. Наклад 100 прим. Зам. № . Ціна договірна.

Видавець і виготовлювач
Видавничий центр НТУ «ХПІ», вул. Кирпичова, 2, м. Харків, 61002
Свідоцтво про державну реєстрацію № 5478 від 21.08.2017 р.